TOETS DISCRETE STRUCTUREN

18-3-2011

□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□

Voorzie de in te leveren bladen van je naam, en nummer ze. Schrijf op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Bij elk van de opgaven is het maximale aantal te behalen punten vermeld. ***Antwoorden dienen altijd van een motivatie te worden voorzien.*** *Succes!*

Opgave 1. (10 pt) Gegeven is een willekeurige universele verzameling U. Bewijs dat voor elk tweetal deelverzamelingen A en B van U geldt: $A \cap (A \cup B) = A$. Benoem de gebruikte regels.

Opgave 2. (10 pt) Gegeven de verzameling $A = \{p, q, r\}$. Welke reguliere expressie correspondeert met de reguliere verzameling $\{pq, ppqq, ppqpqq, ppqpqpqq, ppqpqpqpqq, \ldots\}$? Geef de reguliere verzamelingen die corresponderen met de volgende reguliere expressies: $(p \vee q)\, r\, q^*$ en $p\,(q\,q)^*\, r$.

Opgave 3. (10 pt) Zij $n \in \mathbb{Z}^+$ en $P(n)$ de bewering: $10\,n < 3^n$. Geef de kleinste integer k waarvoor $P(k)$ waar is, en bewijs vervolgens dat $P(n)$ waar is voor alle $n \geqslant k$.

Opgave 4. (5 pt) De binaire operatie $\diamond$ op $\mathbb{R}$ wordt gedefinieerd als: $x \diamond y = \frac{x+y}{2}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Is deze operatie: (i) commutatief? (ii) associatief? Motiveer je antwoord.

Opgave 5. (15 pt) Laat $R = \{(1,3), (1,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$ een relatie zijn op $A = \{1,2,3,4\}$.

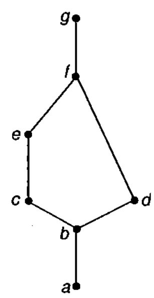
- **a.** Teken de graaf van R.
- **b.** Geef de matrixrepresentatie van R
- **c.** Is R reflexief, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch?
- **d.** Bepaal R^2 en $R^{-1} \circ R$.
- **e.** Bepaal de transitieve afsluiting van R en teken de bijbehorende graaf.

Opgave 6. (10 pt) Gegeven zijn verzamelingen A en B, en een injectieve functie $f : A \to B$, die overal op A is gedefinieerd. Bewijs dat voor elke deelverzameling $V \subseteq A$ geldt: $f^{-1}(f(V)) = V$.

Opgave 7. (5 pt) Bekijk de verzamelingen $\mathbb{Z}^+$ (de natuurlijke getallen) en $A = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid n \text{ is een even geheel getal}\}$. De functie $f : \mathbb{Z}^+ \to A$ is gedefinieerd als: $f(n) = 2n$. Bewijs dat f een bijectie (1-1 correspondentie) is tussen $\mathbb{Z}^+$ en A.

Opgave 8. (10 pt) Gegeven zijn de rijen $f(n) = 2^n$ en $g(n) = n!$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Bewijs: f is $O(g)$. Geldt ook dat $f\, \Theta\, g$? Motiveer je antwoord.

Opgave 9. (15 pt)
In de figuur hiernaast is het Hasse diagram van een partiële ordening $\leq$ op $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ weergegeven.



- **a.** Geef alle minimale, maximale, kleinste en grootste elementen van A (voor zover ze bestaan).
- **b.** Geef alle kleinste bovengrenzen en grootste ondergrenzen (voor zover ze bestaan) van de deelverzamelingen $\{b, c, d\}$ en $\{f, b\}$.
- **c.** Is $(A, \leq)$ een tralie? Zo ja, is het tralie begrensd; is het distributief?

Opgave 10. (10 pt) Gegeven een Boolese algebra $(L, \leq)$. Voor elke $a \in L$ wordt met a' het complement van a aangeduid. Bewijs dat, voor elke $a, b \in L$, geldt: $b \wedge (a \vee (a' \wedge (b \vee b'))) = b$.

Uitwerking toets

Opgave 1. (10 pt)

Enerzijds:

$$\begin{aligned}
& x \in A \cap (A \cup B) \\
\Rightarrow & \{ \text{ definitie } \cap \text{ } \} \\
& x \in A \wedge x \in (A \cup B) \\
\Rightarrow & \{ \text{ logica } \} \\
& x \in A
\end{aligned}$$

Anderzijds:

$$\begin{aligned}
& x \in A \\
\Rightarrow & \{ \text{ logica } \} \\
& x \in A \wedge (x \in A \vee x \in B) \\
\Rightarrow & \{ \text{ definitie } \cup \text{ } \} \\
& x \in A \wedge x \in (A \cup B) \\
\Rightarrow & \{ \text{ definitie } \cap \text{ } \} \\
& x \in A \cap (A \cup B)
\end{aligned}$$

Opgave 2. (10 pt)
Met de reguliere verzameling $\{p\,q, p\,p\,q\,q, p\,p\,q\,p\,q\,q, p\,p\,q\,p\,q\,p\,q\,q, p\,p\,q\,p\,q\,p\,q\,p\,q\,q, \ldots\}$ correspondeert de reguliere expressie $p(p\,q)^*q$.
Met de reguliere expressie $(p \vee q)\,r\,q^*$ correspondeert de reguliere verzameling

$$\{p\,r, q\,r, p\,r\,q, q\,r\,q, p\,r\,q\,q, q\,r\,q\,q, p\,r\,q\,q\,q, q\,r\,q\,q\,q, \ldots\}$$

Met de reguliere expressie $p\,(q\,q)^*\,r$ correspondeert de reguliere verzameling

$$\{p\,r, p\,q\,q\,r, p\,q\,q\,q\,q\,r, p\,q\,q\,q\,q\,q\,q\,r, \ldots\}$$

Opgave 3. (10 pt)
$k = 4$ is de kleinste integer k waarvoor $P(k)$ waar is. Stel $P(k)$ is waar: $10\,k < 3^k$. Dan

$$\begin{aligned}
10\,(k+1) &= 10\,k + 10 \\
&< 3^k + 10 && (\textit{inductiehyp.}) \\
&< 3^k + 3^k < 3^k + 3^k + 3^k && (k \geqslant 4) \\
&= 3 \cdot 3^k = 3^{k+1}
\end{aligned}$$

Dus $P(k+1)$ is waar, dus $P(n)$ is waar voor alle $n \geqslant 4$.

Opgave 4. (5 pt)

$$y \diamond x = \frac{y+x}{2} = \frac{x+y}{2} = x \diamond y,$$

dus $\diamond$ is commutatief.

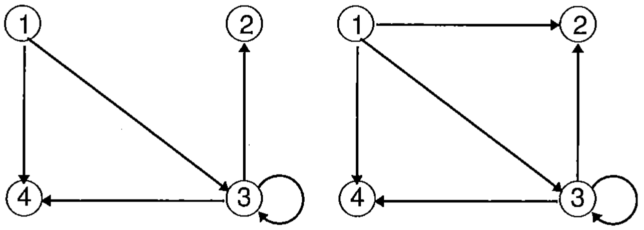
$$(x \diamond y) \diamond z = (\frac{x+y}{2}) \diamond z = \frac{\frac{x+y}{2} + z}{2} = \frac{x+y+2z}{4},$$

maar

$$x \diamond (y \diamond z) = x \diamond (\frac{y+z}{2}) = \frac{x + \frac{y+z}{2}}{2} = \frac{2x+y+z}{4},$$

dus $\diamond$ is niet associatief.

Opgave 5. (15 pt)



Figuur 1: Links: de graaf van R; rechts: de graaf van $\mathtt{t}(R)$

a. De graaf van R staat in figuur 1, links.

b.

$$\mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. R is niet reflexief, want niet alle knopen hebben een relatie met zichzelf. R is niet symmetrisch, zo is er b.v. geen kant van 4 naar 1 terwijl er wel een kant van 1 naar 4 is. R is antisymmetrisch, want tussen verschillende knopen is hoogstens één kant. R is niet asymmetrisch: omdat er een kant is van 3 naar zichzelf is niet voldaan aan $(x, y) \in R \implies (y, x) \notin R$ voor alle $x, y \in A$.

d. $R^2 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$ en $R^{-1} \circ R = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3)\}$.

e. De transitieve afsluiting van R is gelijk aan R^2. De graaf van $\mathtt{t}(R)$ staat in figuur 1, rechts.

Opgave 6. (10 pt)

- We bewijzen dat $V \subseteq f^{-1}(f(V))$.

  Stel $x \in V$. Omdat f totaal is, is er een $y \in B$ met $f(x) = y$, d.w.z. $(x, y) \in f$ en $y \in f(V)$. Dan ook $(y, x) \in f^{-1}$, d.w.z. $x = f^{-1}(y)$. Omdat $y \in f(V)$ geldt dus dat $x \in f^{-1}(f(V))$.

- We bewijzen dat $f^{-1}(f(V)) \subseteq V$.

  Stel $x \in f^{-1}(f(V))$. Dan is er een $y \in f(V)$ met $x = f^{-1}(y)$, oftewel $f(x) = y$. Omdat $y \in f(V)$ is er een $z \in V$ met $y = f(z)$. We hebben dus $y = f(x) = f(z)$. Omdat f injectief is, volgt dat $x = z$. En omdat $z \in V$ geldt dus ook $x \in V$.

Opgave 7. (5 pt)
f is injectief, want stel $f(n) = f(m)$, dan $2n = 2m$, dus $n = m$.
f is surjectief, want stel $m \in A$, dan is m van de vorm $m = 2n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, dus $m = f(m/2)$.
f is overal gedefinieerd op $\mathbb{Z}^+$. Dus f is een bijectie tussen $\mathbb{Z}^+$ en A.

Opgave 8. (10 pt)
We weten dat $n! > 2^n$ voor $n \geqslant 4$. Dus $f(n) \leq g(n)$ voor $n \geqslant 4$, d.w.z., f is $O(g)$.
Maar ook geldt dat er geen constanten c en k zijn zodat $g(n) \leq c \cdot f(n)$ voor $n \geqslant k$. Dus g is niet $O(f)$, en dus geldt ook niet dat $f \, \Theta \, g$.

Opgave 9. (15 pt)

a. Het enige minimale element is a, dit is tevens het kleinste element. Het enige maximale element is g, dit is tevens het grootste element.

b. Deelverzameling $\{b, c, d\}$: kleinste bovengrens is f en grootste ondergrens is b.
Deelverzameling $\{f, b\}$: kleinste bovengrens is f en grootste ondergrens is b.

c. $(A, \leq)$ is een tralie, want elk tweetal elementen van A heeft een kleinste bovengrens en een grootste ondergrens in A. Het tralie is begrensd: ondergrens a, bovengrens g. Het tralie is niet distributief. Neem b.v. de elementen e, c, d. Dan

$$e \wedge (c \vee d) = e \wedge f = e, \text{ maar } (e \wedge c) \vee (e \wedge d) = c \vee b = c$$

Dus geldt niet voor alle $a, b, c \in A$ dat $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Opgave 10. (10 pt)
We gebruiken de substitutieregel: De eigenschappen van elke eindige Boolese algebra zijn precies die van het tralie $(P(U), \subseteq, \cup, \cap, ^-)$, met U een universele verzameling. Dus we gaan bewijzen dat voor alle deelverzamelingen A, B van U geldt: $B \cap (A \cup (\overline{A} \cap (B \cup \overline{B}))) = B$.

$$\begin{aligned}
& B \cap (A \cup (\overline{A} \cap (B \cup \overline{B}))) \\
= & \{ \text{ complement } \} \\
& B \cap (A \cup (\overline{A} \cap U)) \\
= & \{ \text{ eigenschap universele verzameling } \} \\
& B \cap (A \cup \overline{A}) \\
= & \{ \text{ complement } \} \\
& B \cap U \\
= & \{ \text{ eigenschap universele verzameling } \} \\
& B
\end{aligned}$$